CONCOURS E.N.S.I DE CHIMIE. GROUPE CENTRE
SESSION 1980
PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
(OPTION P', TB)

DURÉE : 2 heures

Étant donné une fonction continue f définie sur l'intervalle ferme $[0,1]$ et à valeurs réelles, le problème a pour but la construction d'une suite de polynômes convergeant uniformément vers f.

1. Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, on pose

$$\Delta^0 y_k = y_k$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$
$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k).$$

et de façon générale

$$\Delta^n y_k = \Delta(\Delta^{n-1} y_k).$$

Exprimer $\Delta^n y_k$ en fonction des nombres de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2. Étant donne une fonction continue f définie sur l'intervalle ferme $[0,1]$ et à valeurs réelles, on lui associe un polynôme $B_n(f,x)$ défini par

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

Montrer que le polynôme $B_n(f,x)$ est au plus de degré n et qu'on peut l'écrire sous la forme

$$B_n(f,x) = \sum_{t=0}^{n} \Delta^t f(0) \frac{n!}{t!(n-t)!} x^t$$

où

$$\Delta f\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right), \quad k \in [\![0,n]\!].$$

3. Donner l'expression de $B_n(f,x)$ dans chacun des cas particuliers suivants :

a. $f : x \mapsto 1$.

b. $f : x \mapsto x$.

c. $f : x \mapsto x^2$.

4. Dans chacun des cas particuliers précédents, montrer que la suite $(B_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

5. Établir la relation

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

On pourra se servir utilement des expressions de $B_n(1,x)$, $B_n(x,x)$ et $B_n(x^2,x)$ établies précédemment.
En déduire l'inégalité

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq x}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

où δ est un nombre positif, $x \in [0,1]$ et la sommation est étendue à toutes les valeurs de k appartenant à l'ensemble $\{0,1,2,...,n-1,n\}$ satisfaisant à l'inégalité $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| \geq \delta$.

6. Montrer que, si f est une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[0,1]$, la suite $(B_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

FIN DE L'ÉPREUVE